PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Rechnen Sie nach, dass $\frac{423}{91} \in \mathbb{Q}$ die Kettenbruchdarstellung $[4; 1, 1, 1, 5, 2, 2]$ besitzt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Bestimmen Sie Grundeinheiten der quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$,$\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ ein kubischer Zahlkörper und sei $a \in \mathcal{O}_K^\times$ eine Einheit des zugehörigen Zahlringes. Man kann zeigen, dass stets die Ungleichung $|\mathrm{disc}(K)| < 4a^3 + 24$ gilt, wobei wir a vermöge der reellen Einbettung von K als reelle Zahl auffassen.

(i) Folgern Sie aus obiger Ungleichung, dass wenn $a > 1$ ist und $4a^{\frac{3}{2}} + 24 < |\mathrm{disc}(K)|$ erfüllt, a bereits eine Grundeinheit sein muss.

(ii) Finden Sie nun vermöge Aufgabenteil (i) eine Grundeinheit von $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl mit der Eigenschaft, dass $4m^3 + 27$ quadratfrei ist und betrachte den Zahlkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) = K$, wobei α die reelle Nullstelle des Polynomes $x^3 + mx - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ ist. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 3 (i), dass α^{-1} eine Grundeinheit von K ist.